

FONCTIONS

Classification Thèmes de MegaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Exercice : On considère la fonction $f(x) = \cos^2 x + \sin x \cos x$.

a) Représenter graphiquement f .

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\pi$.

Solution : a)

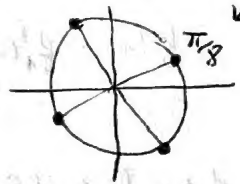
$$* f(x) = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$f'(x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \text{ d'où l'on a :}$$

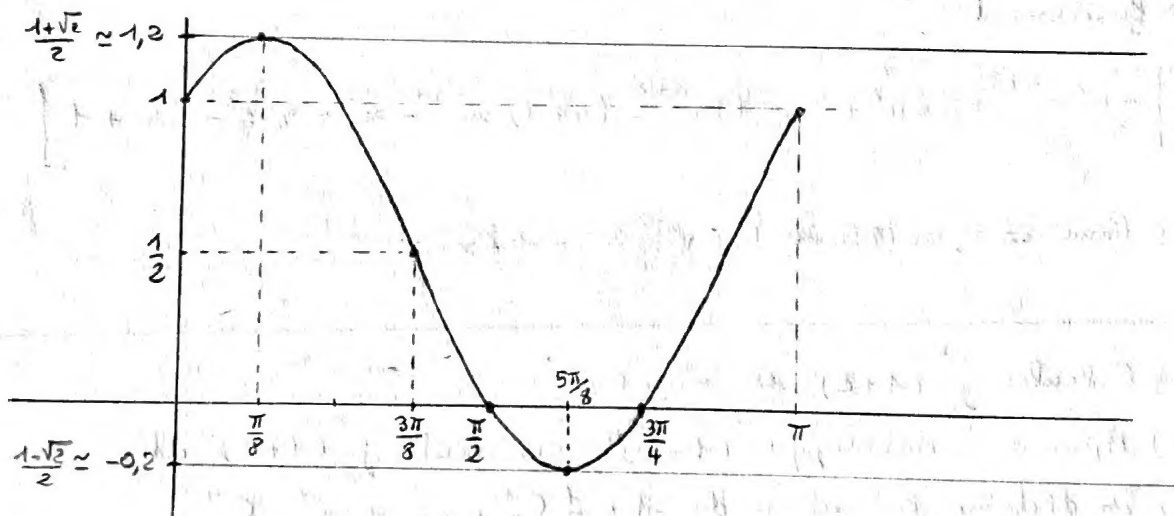
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} - k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2k\pi < \frac{\pi}{4} - 2x < (2k+1)\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} - (2k+1)\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{8} - k\pi$$

* f est périodique de période π , donc on l'étudie sur $[0, \pi]$.



x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	π			
f'	1	+	0	-	0	+	1
f	1	$\nearrow \frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\searrow \frac{1-\sqrt{2}}{2}$	\nearrow	1		



b) Aire géométrique entre $y=f(x)$, $y=0$, $x=0$ et $x=\pi$:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} f = 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{1}$$

$$\text{car } \int f dx = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Énoncé: $f(x) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \dots + (n-1)nx^{n-2}$

$$g(x) = 1 + x + 4x^2 + 9x^3 + \dots + n^2x^n$$

1° Déterminer la primitive f_1 de f qui vaut 1 pour $x=0$, puis la primitive f_2 de f_1 valant 1 pour $x=0$. Donner une autre expression de f_2 lorsque $x \neq 1$.

En déduire d'autres expressions de f_1 et f lorsque $x \neq 1$.

2° Montrer que $g = 1 + xf_1 + x^2f$

3° En déduire une autre expression de $g(x)$ lorsque $x \neq 1$.

1° $f(x) = \sum_{k=2}^n (k-1)kx^{k-2} \Rightarrow f_1(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1} \Rightarrow f_2(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$.

Ainsi: $f_1(x) = f_2'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

$$f(x) = f_1'(x) = \frac{n(1-n)x^{n+1} + 2(n^2-1)x^n - n(n+1)x^{n-1} + 2}{(1-x)^3}$$

2° $1 + xf_1 + x^2f = 1 + x \sum_{k=1}^n kx^{k-1} + x^2 \sum_{k=1}^n (k-1)kx^{k-2} = \sum_{k=1}^n k^2x^k + 1 = g(x)$

3° On trouve facilement:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^3} \left[-n^2x^{n+3} + (2n^2+2n-1)x^{n+2} - (n+1)^2x^{n+1} - x^3 + 4x^2 - 2x + 1 \right]$$

Vérification: Pour $n=1$, on trouve bien $g(x) = 1+x$

Énoncé: a) Calculer $\int_0^x (1+t)^n dt$ où $n \in \mathbb{N}$

b) Après avoir développé $(1+t)^n$, recalculer $\int_0^x (1+t)^n dt$

c) En déduire la valeur de $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$

Sol. a) $\int_0^x (1+t)^n dt = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$

b) $\int_0^x \sum_{k=0}^n C_n^k t^k dt = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$

c) Pour $x=1$, on obtient: $\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

a) Étudier le signe de $g(x) = 2\sqrt{1-x} - x$

b) Étudier puis représenter graphiquement la fonction $f(x) = x e^{\sqrt{1-x}}$

a) Def $g =]-\infty, 1]$.

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x} \geq x \quad (*)$$

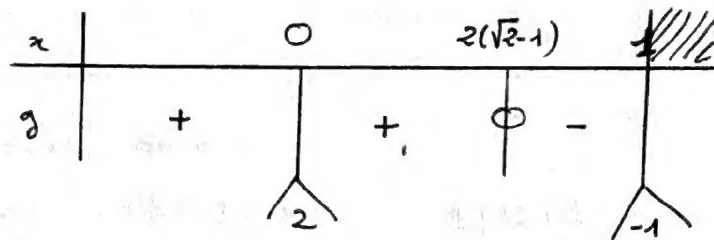
(*) est trivial si $x \leq 0$.

$$\text{Si } 0 < x \leq 1, \quad (*) \Leftrightarrow 4(1-x) \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{2} \leq x \leq -2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Delta' = 8 > 0$$

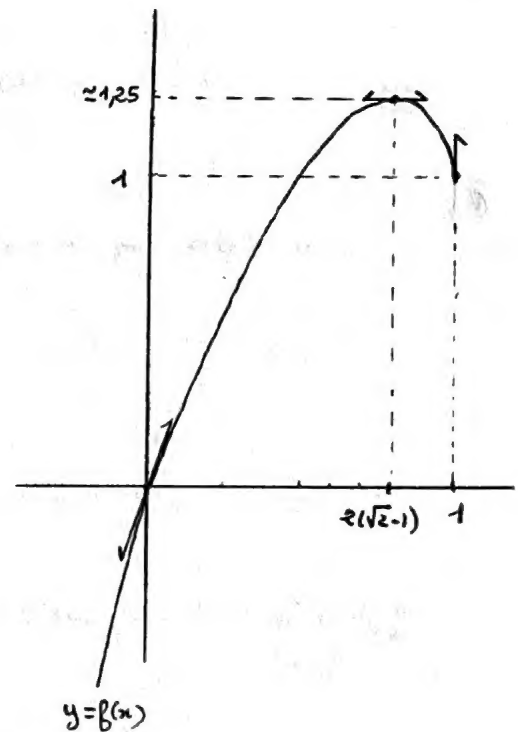
$$\text{racines: } -2 \pm 2\sqrt{2}$$

D'où :



b) $f'(x) = \frac{g(x) e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$ sera du signe de $g(x)$

x	-∞	2(√2-1) ≈ 0,8	1
f'	+	0	-
f	-∞	≈ 1,25	1



On désire montrer que pour tout réel $x > 0$: $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ (*)

a) Soit $x > 1$. Utiliser les inégalités des accroissements finis pour la fonction \ln sur l'intervalle $[1, x]$ pour obtenir (*).

Soit $0 < x < 1$. Noter que $\frac{1}{x} > 1$ et retrouver (*).

Conclure.

b) Tracer les représentations graphiques des fcts $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = \ln x$ et $h(x) = x-1$ dans le même repère.

c) Proposer une autre démonstration de (*) qui utilise 2 études des variations de fonctions.

a) * Prenons $g(x) = \ln x$. On a :

$$\forall x > 1 \quad \forall t \in]1, x[\quad g'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x} \leq g'(t) \leq 1$$

Les inégalités des acc. finis (*) donnent :

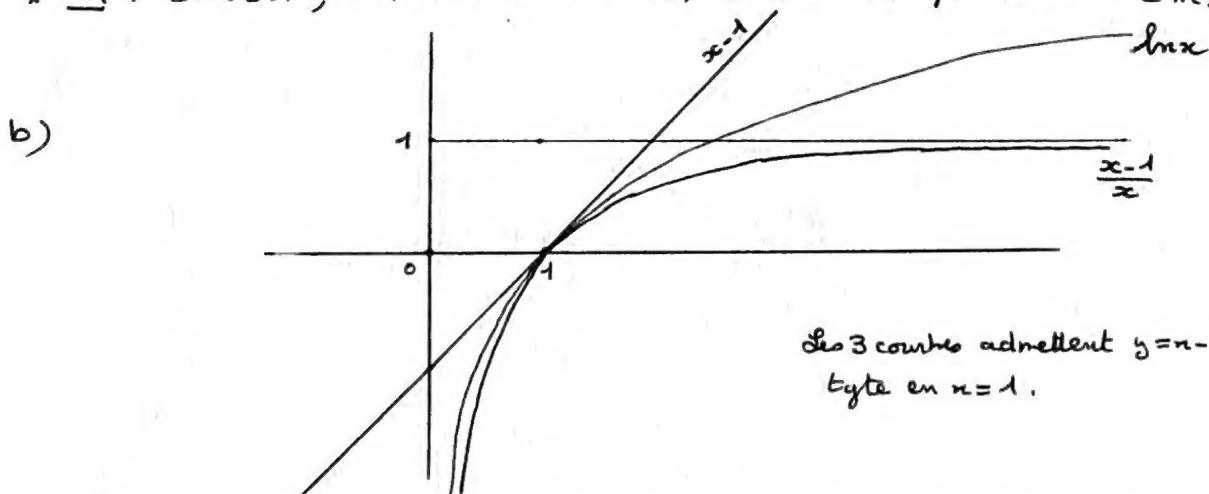
$$\forall x > 1 \quad \frac{1}{x} (x-1) \leq \underbrace{g(x) - g(1)}_{\ln x} \leq x-1$$

* Il suffit d'appliquer (*) à $\frac{1}{x}$ quand $0 < x < 1$ pour obtenir :

$$\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \leq \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$$

$$1-x \leq -\ln x \leq \frac{1-x}{x} \quad \text{d'où (*) dans ce cas.}$$

* Ccl : Si $x=1$, (*) est triviale. (*) a donc lieu pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.



Les 3 courbes admettent $y=x-1$ pour tangente en $x=1$.

(*) version : "Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, I int. de \mathbb{R} , si $a, b \in I$ et $a < b$, et si $\forall t \in I \quad m \leq f'(t) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ " (cf TC Transmath 87 et 1077)

c) * Montrer $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$ revient à montrer que $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$,

où $\varphi(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$.

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ d'où le tableau de var.

x	0	1	
φ'		- 0 +	
φ	$+\infty$	0	$\nearrow +\infty$

et le résultat.

car $\varphi(x) = \frac{1}{x} (x \ln x + 1) - 1$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow 0^+$)

* De même, prouvons que $\ln x \leq x-1 \quad \forall x > 0$

ie $\varphi(x) = \ln x - x + 1 \leq 0 \quad \forall x > 0$

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ d'où le tableau :

x	0	1	$+\infty$
φ'		+ 0 -	
φ	$-\infty$	0	$\searrow -\infty$

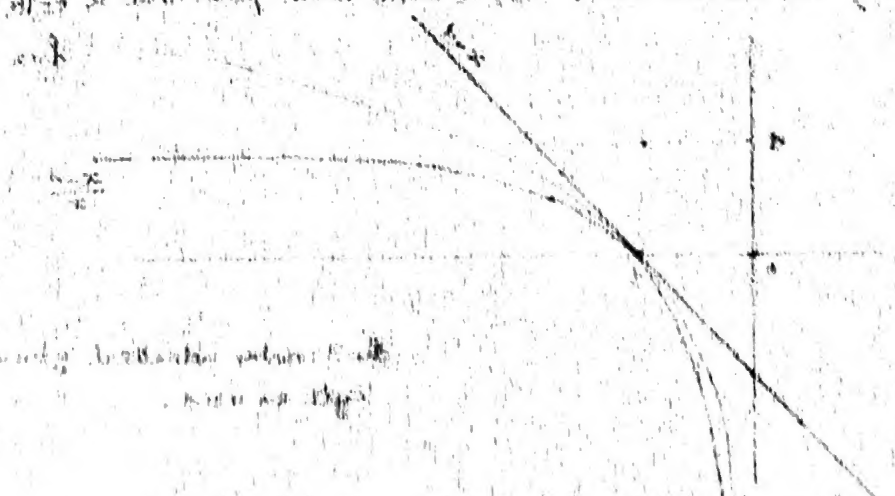
car $\varphi(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 1 \quad (x \rightarrow +\infty)$
 $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \rightarrow 0 \rightarrow -\infty$

Q.F.D.

NB : prolongation possible en TC Transmath 87 E1, Chap 6., p124.

$$1 - \frac{1}{x} \geq \frac{1}{x} \ln x \geq \frac{1 - \frac{1}{x}}{x}$$

* Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $1 - \frac{1}{x} \geq \ln x \geq \frac{1 - \frac{1}{x}}{x}$



\ln n'est pas une fraction rationnelle.

Soit $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ une fonction définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$, où f et g

sont 2 polynômes à coefficients réels.

On suppose que 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

$$2) \quad \forall x \in D \setminus \{0\} \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x}$$

Montrer que l'on arrive à une absurdité.

(Ind. : écrire $g(x) = x^n h(x)$ où $h(0) \neq 0$, et montrer que nécessairement $n \geq 1$)

* 0 est racine du polynôme g (sinon $g(0) \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(0)}{g(0)} \neq -\infty$)

$$* \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x(f'g - fg') = g^2(x)$$

Notons $g(x) = x^n h(x)$ où $n \geq 1$ et $h(0) \neq 0$, on aura :

$$x(f'(x) \cdot x^n h(x) - f(x)[n x^{n-1} h(x) + x^n h'(x)]) = x^{2n} h^2(x)$$

$$x^{n+1} f' \cdot h - n x^n f \cdot h - x^{n+1} f \cdot h' = x^{2n} \cdot h^2$$

$$x f' \cdot h - n f \cdot h - x f \cdot h' = x^n \cdot h^2 \quad \text{pour tout } x \in D \setminus \{0\}$$

Pour $x=0$, on obtient $f(0) \cdot h(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ absurde! (sinon on aurait simplifié la fraction rationnelle $\frac{f}{g}$ par x)

CQFD

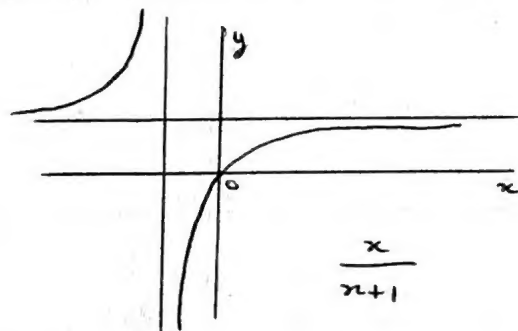
On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \cos x$$

Mq $f(\mathbb{R}_+) =]-1, 1[$

Si $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \frac{x}{x+1} < 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

entraînent $f(\mathbb{R}_+) \subset]-1, 1[$



Réc., soit $m \in]-1, 1[$.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k2\pi) = \lim_{k2\pi+1} \frac{k2\pi}{k2\pi+1} = 1 \quad \text{donc il existe } k_0 \text{ tel que}$$

$$f(k_0 2\pi) > m$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k2\pi + \pi) = \lim_{k2\pi + \pi + 1} \frac{k2\pi + \pi}{k2\pi + \pi + 1} = -1, \quad \text{donc il existe}$$

$$k_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } f(k_1 2\pi + \pi) < m.$$

de th. des valeurs intermédiaires et $f(\pi + k_1 2\pi) < m < f(k_0 2\pi)$,
 f continue, entraînent $m \in f(\mathbb{R}_+)$.

a) En utilisant la fonction logarithme décimal \log , exprimer le nombre $C(n)$ de chiffres de l'écriture décimale d'un entier naturel n .

b) Combien de chiffres interviennent dans l'écriture décimale de :

$$9^{(9^9)} ?$$

$$2^{86242} (2^{86243} - 1) ?$$

Donner une approximation aussi précise que possible pour ces 2 nombres.

a) $C(n)$ est caractérisé par : $10^{C(n)-1} \leq n < 10^{C(n)}$

soit : $C(n) - 1 \leq \log n < C(n)$

Donc

$$C(n) = E(\log n) + 1$$

b) * Soit $n = 9^{(9^9)}$:

Le danger réside dans la confusion possible entre :

$$9^{(9^9)} \rightarrow \text{la machine affiche "error" (overflow)}$$

$$(9^9)^9 \rightarrow \text{" " " } 1,9663 \cdot 10^{77}$$

$$\log 9^{(9^9)} = 9^9 \log 9 \simeq 369\,693\,099,6$$

Le nbre de chiffres de l'écriture décimale de $9^{(9^9)}$ est donc 369 693 100

et son approximation sera :

$$9^{(9^9)} \simeq 10^{369\,693\,099,6} = 10^{0,6} \cdot 10^{369\,693\,099}$$

$$\simeq 3,981071706 \cdot 10^{369\,693\,099}$$

* Pour $n = 2^{86242} (2^{86243} - 1)$:

$n = 2^{172485} - 2^{86242}$ aura le même nombre de chiffres que 2^{172485} . On

calcule donc : $\log 2^{172485} = 172485 \cdot \log 2 \approx 51923,1588$

soit 51924 chiffres dans l'écriture de n .

Pour approximer n , on va chercher des approximations de 2^{172485} et 2^{86242} par la méthode précédente :

$$\log 2^{172485} \approx 51923,1588 \Rightarrow 2^{172485} \approx 10^{51923} \cdot 10^{0,1588} \approx 1,441451386 \cdot 10^{51923}$$

$$\log 2^{86242} \approx 25961,42889 \Rightarrow 2^{86242} \approx 10^{25961} \cdot 10^{0,42889} \approx 2,684664376 \cdot 10^{25961}$$

$$\text{Donc } n \approx 1,441451386 \cdot 10^{51923} - 2,684664376 \cdot 10^{25961} \approx (1,441451386 \cdot 10^{25962} - 2,684664376) \cdot 10^{25961}$$

et je n'ai aucun inconvénient à approximer n par $1,44 \cdot 10^{51923}$ (!).

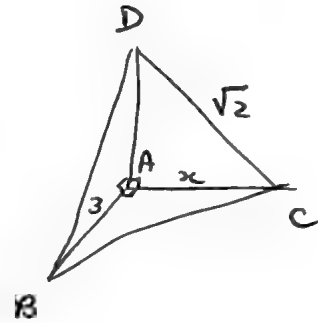
Exercice 1 du concours général 1998 : Un tétraèdre vérifie les cond. suivantes :

(a) les arêtes AB, AC et AD sont 2 à 2 orthogonales

(b) $AB=3$ et $CD=\sqrt{2}$

Déterminer la valeur minimale de $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

(cf énoncé en ucs 0001)



Posons $AC=x$.

$$\begin{cases} BC^2 = 9 + x^2 \\ AD^2 = 2 - x^2 \\ BD^2 = 9 + (2 - x^2) = 11 - x^2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6 \\ &= (9 + x^2)^3 + (11 - x^2)^3 - x^6 - (2 - x^2)^3 \\ &= 54x^4 - 108x^2 + 1566 \end{aligned}$$

Posons $x^2=t$, le minimum de la fct du 2^e-degré $g(t) = 54t^2 - 108t + 1566$ est atteint pour t annulant $g'(t) = 108t - 108$, ie pour $t=1$.

La valeur minimale de $f(x)$ est donc obtenue pour $t=1$, ie $x=1$.

C'est :

$$f(1) = 54 - 108 + 1566 = \boxed{1512}$$

a) Étudier le signe de $g(x) = 2\sqrt{1-x} - x$

b) Étudier puis représenter graphiquement la fonction $f(x) = x e^{\sqrt{1-x}}$

a) Def $g =]-\infty, 1]$.

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x} \geq x \quad (*)$$

(*) est trivial si $x \leq 0$.

$$\text{Si } 0 < x \leq 1, \quad (*) \Leftrightarrow 4(1-x) \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{2} \leq x \leq -2 + 2\sqrt{2}$$

$$\Delta' = 8 > 0$$

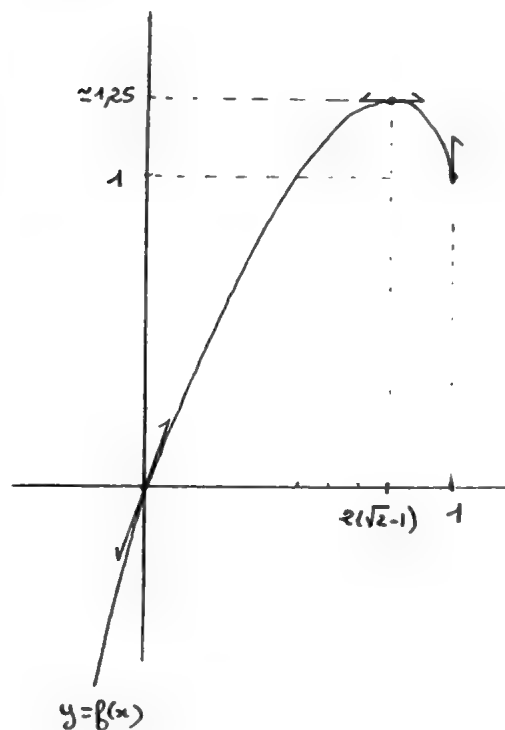
$$\text{racines: } -2 \pm 2\sqrt{2}$$

Donc :

x		0		$2(\sqrt{2}-1)$		1
g		+		+		-
		2				-1

b) $f'(x) = \frac{g(x) e^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$ sera du signe de $g(x)$

x	$-\infty$		$2(\sqrt{2}-1) \approx 0,8$		1
f'		+	0	-	$-\infty$
f	$-\infty$	\nearrow	$\approx 1,25$	\searrow	1



On désire montrer que pour tout réel $x > 0$ $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ (*)

a) Soit $x > 1$. Utiliser les inégalités des accroissements finis pour la fonction \ln sur l'intervalle $[1, x]$ pour obtenir (*).

Soit $0 < x < 1$. Noter que $\frac{1}{x} > 1$ et retrouver (*).

Conclure

b) Tracer les représentations graphiques des fcts $f(x) = \frac{x-1}{x}$, $g(x) = \ln x$ et $h(x) = x-1$ dans le même repère.

c) Proposer une autre démonstration de (*) qui utilise 2 études des variations de fonctions.

a) * Posons $g(x) = \ln x$. On a :

$$\forall x > 1 \quad \forall t \in]1, x[\quad g'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x} \leq g'(t) \leq 1$$

Les inégalités des acc. finis (*) donnent :

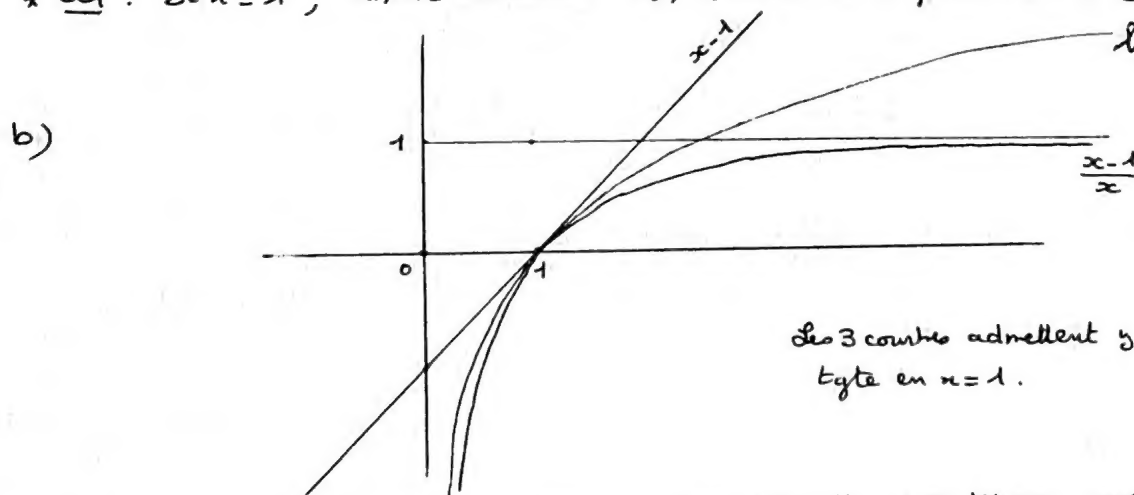
$$\forall x > 1 \quad \frac{1}{x} (x-1) \leq \underbrace{g(x) - g(1)}_{\ln x} \leq x-1$$

* Il suffit d'appliquer (*) à $\frac{1}{x}$ quand $0 < x < 1$ pour obtenir :

$$\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \leq \ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1$$

$$1 - x \leq -\ln x \leq \frac{1-x}{x} \quad \text{d'où (*) dans ce cas.}$$

* Cel : Si $x = 1$, (*) est triviale. (*) a donc lieu pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.



(*) version : " Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, I int. de \mathbb{R} , si $a, b \in I$ et $a < b$, et si $\forall t \in I \quad m \leq f'(t) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ "

c) * Montrer $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$ revient à montrer que $\varphi(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$,

où $\varphi(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ d'où le tableau de var.

et le résultat.

x	0	1	
φ'		- 0 +	
φ	$+\infty$	0	$\nearrow +\infty$

car $\varphi(x) = \frac{1}{x} (x \ln x + 1) - 1$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \xrightarrow{+\infty} \xrightarrow{0} \quad (x \rightarrow 0^+)$

* De même, prouvons que $\ln x \leq x - 1 \quad \forall x > 0$

ie $\psi(x) = \ln x - x + 1 \leq 0 \quad \forall x > 0$

$\psi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ d'où le tableau :

x	0	1	$+\infty$
ψ'		+ 0 -	
ψ	$-\infty$	0	$\searrow -\infty$

car $\psi(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 1 \quad (x \rightarrow +\infty)$
 $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \xrightarrow{0} \xrightarrow{+\infty}$

CFP)

NB : prolongation possible en TC Transmath 87 E1, Chap 6., p124.

Une fonction booléenne est une application f de \mathbb{F}_2^m dans \mathbb{F}_2 ,
où $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Hq toutes les fonctions booléennes f de \mathbb{F}_2^m dans \mathbb{F}_2 sont des applications polynômiales.

(cf [A]/R Moreno aem, article de Moreno / Cáceres / Alonso dernier paragraphe sur les fcts booléennes)

Récurrence sur m .

$$\begin{aligned} * \text{ sur } m=1, \quad & f(0) = 0 \quad \left| \quad 0 \quad \left| \quad 1 \quad \left| \quad 1 \right. \right. \\ & f(1) = 1 \quad \left| \quad 0 \quad \left| \quad 1 \quad \left| \quad 0 \right. \right. \\ & f(x) = x \quad \left| \quad 0 \quad \left| \quad 1 \quad \left| \quad 1+x \right. \right. \end{aligned}$$

C'est vrai, $f(x)$ est d'ailleurs un polynôme de degré 1.

* Aug m : Il existe un polynôme $g(x_1, \dots, x_{m-1})$ et un polynôme $h(x_1, \dots, x_{m-1})$ tels que :

$$\cancel{f(x_1, \dots, x_m)} = g$$

$$f(x_1, \dots, x_{m-1}, 0) = g(x_1, \dots, x_{m-1})$$

$$f(x_1, \dots, x_{m-1}, 1) = h(x_1, \dots, x_{m-1})$$

(hypothèse récurrente)

De plus :

$$f(x_1, \dots, x_m) = \underbrace{g(x_1, \dots, x_{m-1}) (1 - x_m) + h(x_1, \dots, x_{m-1}) \cdot x_m}_{\text{polynôme d'indéterminées } x_1, \dots, x_m.}$$

polynôme d'indéterminées x_1, \dots, x_m .

car

NB : On a même prouvé que $\deg f(x_1, \dots, x_m) \leq m$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$.

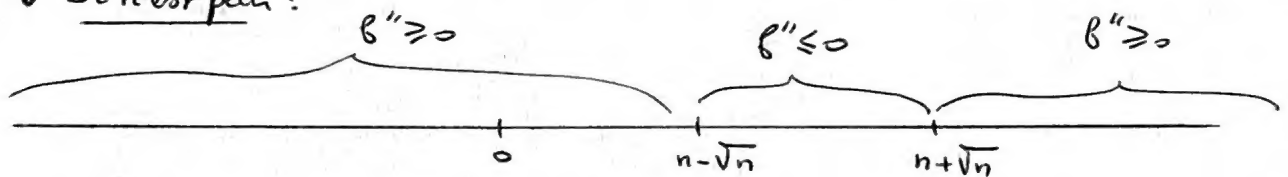
étudier la convexité de l'application f_n définie sur \mathbb{R} par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x} \quad (\text{où } n \in \mathbb{N})$$

1) Cas où $n \geq 2$: On trouve
$$\begin{cases} f'_n(x) = (n-x) x^{n-1} e^{-x} \\ f''_n(x) = (x^2 - 2nx + n^2 - n) x^{n-2} e^{-x} \end{cases}$$

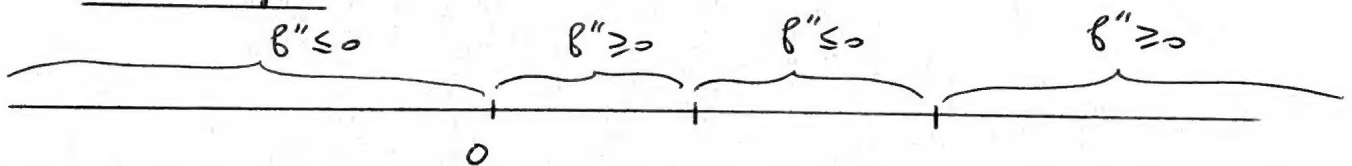
Les racines du trinôme $P(x) = x^2 - 2nx + n^2 - n$ sont $n \pm \sqrt{n}$,
d'où la discussion :

• Si n est pair :



f sera convexe sur $] -\infty, n-\sqrt{n}]$ et sur $[n+\sqrt{n}, +\infty [$, concave sur $[n-\sqrt{n}, n+\sqrt{n}]$.

• Si n est impair :



2) Cas où $n = 0$: $f_0(x) = e^{-x}$ est convexe car $f''_0(x) = e^{-x} \geq 0$

3) Cas où $n = 1$: $f_1(x) = x e^{-x} \Rightarrow f'_1(x) = (1-x) e^{-x}$
 $\Rightarrow f''_1(x) = -e^{-x} - (1-x) e^{-x}$
 $= (x-2) e^{-x}$

donc f_1 est convexe sur $[2, +\infty[$

" concave sur $] -\infty, 2]$.